THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

DE GRENOBLE

par

Lilia del RIEGO de del CASTILLO

TENSEURS DE WEYL D'UN SPRAY DE DIRECTIONS

Soutenue le 7 mai 1973 devant la commission d'examen

C. CHABAUTY Président

J. GRIFONE
J. KLEIN
J.L. KOSZUL
Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

Lilia del RIEGO de del CASTILLO

TENSEURS DE WEYL D'UN SPRAY DE DIRECTIONS

Soutenue le 7 mai 1973 devant la commission d'examen

C.CHABAUTY Président

J. GRIFONE
J. KLEIN
J.L. KOSZUL
Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

Pages

CHAPITRE I

I.1. Préliminaires 1
I.2. Définitions 2
I.3. Formulaire 7

CHAPITRE II - Tenseur de Weyl

II.1. Changement projectif d'un spray 10
II.2. Tenseur de Weyl 11
II.3. Propriétés 18

CHAPITRE III - Variétés projectivement plates

III.1. Définitions 21
III.2. Nullité du tenseur de Weyl et quelques applications 22
III.3. Variétés finslériennes particulières 25

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544319_0054

INTRODUCTION

Un article de Weyl paru en 1921 (*) fut à l'origine de la géométrie projective des chemins. D'autres travaux, notamment ceux d'Eisenhart, Veblen, Yano, E. Cartan approfondissent cette théorie. Dans son article, Weyl définit le changement projectif d'une connexion et étudie les invariants par rapport à ce changement.

Le but de ce travail est de définir intrinsèquement ces notions et plus particulièrement, d'étudier les tenseurs de Weyl, en utilisant le formalisme des connexions non linéaires introduit par M. Grifone.

Dans le premier chapitre, on rappelle certaines définitions, puis on établit un formulaire.

Dans la première partie du deuxième chapitre, nous introduisons les tenseurs de Weyl : étant donné un spray de directions, à deux représentants S et $\bar{S}$ de ce spray sont associés deux connexions. L'étude des relations entre leurs tenseurs de courbure respectifs permet de définir des tenseurs indépendants du choix des S et $\bar{S}$. Ces tenseurs sont les tenseurs de Weyl.

La deuxième partie du chapitre II est une étude des propriétés de ces tenseurs.

On définit les variétés projectivement plates au chapitre III et on démontre le théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété soit projectivement plate est que l'un de ses tenseurs de Weyl soit nul.

Enfin, le tenseur de Weyl permet de faire une classification des variétés finslériennes.

Ce travail a été effectué avec l'aide du Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologia (Mexique).

(*) H. WEYL - Zur Infinitesimalgeometrie, Einordnung der projectiven und der konformen Auffassung. Göttinger Nachrichten (1921) pp. 99-112.

C'est à Monsieur KLEIN que je dois de présenter cette thèse. Il m'a donné des conseils et avec un soin constant, a voulu revoir ce travail. Qu'il me soit permis de lui exprimer ici ma profonde gratitude, ainsi qu'à Monsieur GRIFONE à qui je dois l'idée de ce travail.

Je remercie Monsieur CHABAUTY, grâce à qui j'ai pu travailler dans les conditions les meilleures. Je lui suis très reconnaissante d'avoir accepté de présider le jury.

Monsieur KOSZUL a accepté d'être examinateur. Je le remercie très vivement pour l'honneur qu'il m'a fait.

Je remercie enfin mes collègues de Géométrie Différentielle avec lesquels j'ai eu la possibilité de discuter fructueusement. Plus particulièrement, Madame CATZ et Monsieur DIENG.

Madame GUTTIN-LOMBARD et Mademoiselle MARCHAND ont dactylographié ce travail, Monsieur GAUDE et Monsieur GIRARD en ont assuré le tirage. Je les remercie pour leur compétence et leur diligence.

CHAPITRE I

I.1 - PRELIMINAIRES

Soit M une variété différentiable réelle de dimension n, TM l'espace fibré de vecteurs tangents à M, $\mathcal{T}M$ la variété de vecteurs non nuls tangents à M.

Nous désignerons par :

- $\pi : TM \to M$ le fibré vectoriel tangent à M ;
- $\mathcal{F}(M)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions différentiables sur M ;
- $\mathcal{X}(M)$ le $\mathcal{F}$-module des champs des vecteurs ;
- $\Phi^p(M)$ le $\mathcal{F}$-module des formes scalaires de degré p ;
- $\Psi^p(M)$ le $\mathcal{F}$-module des formes vectorielles de degré p.

On a $\Phi^\circ(M) = \mathcal{F}(M)$; $\Psi^\circ(M) = \mathcal{X}(M)$.

On notera encore :

- J le tenseur qui définit la structure presque tangente de TM ;
- C le champ canonique sur TM.

A la forme tensorielle J on associe deux dérivations (Frölicher-Nijenhuis) :

- i_J qui est une dérivation de degré 0 définie par :

  i) $i_J f = 0$ pour $f \in \mathcal{F}(TM)$

  ii) $i_J \omega(X) = \omega(JX)$ pour ω une 1-forme scalaire et $X \in \mathcal{X}(TM)$

- et d_J qui est une dérivation de degré 1 définie par :

$$d_J = [i_J, d]$$

où d est la différentielle extérieure.

On notera $\mathcal{L}_X$ la dérivée de Lie par rapport à X , champ de vecteurs.

On définit sur TM un système de coordonnées locales (dit naturel) de la façon suivante :

Soit $V(x^i)$ un voisinage de M de coordonnées locales (x^i) . (x^i, y^i) sont des coordonnées locales de $\pi^{-1}(V)$ telles que le point $\pi(z)$ ait pour coordonnées x^i sur V et y^i sur la fibré passant par z par rapport à la base naturelle $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{\pi(z)}$

I.2 - DEFINITIONS

Nous ferons ici un bref rappel de quelques notions. [8]

Définition I.2.1

Soit ω une p-forme scalaire $(p \geq 1)$ sur TM . ω est semi-basique si :

$$\boxed{i_{JX}\omega = 0}$$

pour tout $X \in \mathcal{X}(TM)$.

Une p-forme vectorielle L $(p \geq 1)$ sur TM est semi-basique si :

$$\boxed{JL = 0}$$

et si

$$\boxed{i_{JX}L = 0}$$

pour tout $X \in \mathcal{X}(TM)$.

Définition I.2.2

Une p-forme scalaire ω sur TM est dite homogène de degré r si

$$\boxed{\mathcal{L}_C \omega = r\omega}$$

Pour les formes vectorielles, nous avons une notion analogue :

Définition I.2.3

Soit A une p-forme vectorielle sur $\mathcal{T}M$. L est dite homogène de degré r si

$$\boxed{[C,A] = (r-1)A} \quad .$$

Définition I.2.4

Un champ de vecteurs S sur TM qui est C^∞ sur $\mathcal{T}M$, C^1 sur la section nulle est un spray s'il vérifie les conditions :

$$JS = C \qquad \text{et} \qquad [C,S] = S \ .$$

Définition I.2.5 [5]

Soit L une p-forme scalaire ou vectorielle semi-basique sur TM , $p \geq 1$. La (p-1)-forme semi-basique

$$L = i_S L$$

où S spray arbitraire est dite potentiel de L .

Définition I.2.6

(M,E) est dite variété finslérienne si :

- M est une variété différentiable réelle de dimension finie n
- E une application $E : TM \to \mathbb{R}^+$ avec $E(0) = 0$, qui est C^∞ sur $\mathcal{T}M$ et C^1 sur la section nulle, homogène de degré deux et telle que $dd_J E$ ait un rang maximum.

On notera g une métrique finslérienne et $\frac{1}{2} L^2 = E$.

La fonction L est appelée lagrangien associé à E .

On vient maintenant à la notion de connexion sur une variété.

Définition I.2.7 (Grifone)

On appelle connexion sur M une 1-forme vectorielle Γ sur TM, C^∞ sur $\mathcal{T}M$ et telle que

$$J\Gamma = J \qquad \text{et} \qquad \Gamma J = -J \ .$$

Remarque :

Γ définit sur TM une structure presque produit. La connexion est dite homogène de degré 1 si la forme vectorielle Γ est homogène de degré 1.

Nous poserons dans la suite

$$h = \frac{1}{2}(I+\Gamma)$$

$$v = \frac{1}{2}(I-\Gamma)$$

où I est la 1-forme vectorielle identité sur TM. On peut vérifier que h et v sont deux projecteurs et qu'ils vérifient les propriétés suivantes :

$$Jh = J \qquad hJ = 0$$
$$Jv = 0 \qquad vJ = J \ .$$

h est dit projecteur horizontal de Γ. v est dit projecteur vertical de Γ.

A toute connexion Γ on associe canoniquement un spray et si S est un spray, $[J,S]$ est une connexion dont le spray est S. [5]

Définition I.2.8

Une géodésique sur M relative à un spray S est une courbe paramétrée

$$f : I \to M \qquad (I \text{ intervalle de } \mathbb{R})$$

telle que f' soit courbe intégrale de S.

On peut démontrer que les géodésiques d'une connexion Γ sont les géodésiques du spray associé à Γ .

Définition I.2.9

Soit Γ une connexion sur M . On appelle torsion faible de Γ la 2-forme sur $\mathcal{T}M$ à valeurs vectorielles dans $T\mathcal{T}M$:

$$t = \frac{1}{2}[J,\Gamma] .$$

On appelle torsion forte de Γ la 1-forme vectorielle sur $\mathcal{T}M$:

$$T = t - \frac{1}{2}[C,\Gamma] .$$

Si $\Gamma = [J,S]$ les tenseurs de torsion t et T sont nuls.

Définition I.2.10

On appelle courbure de la connexion Γ la 2-forme vectorielle R, C^∞ sur $\mathcal{T}M$ définie par

$$R = \frac{1}{2}[h,h]$$

h étant le projecteur horizontal de Γ .

On posera dans la suite :

$$F = h[S,h] - J .$$

F est la structure presque complexe associée à une connexion Γ .

Pour les formes semi-basiques on a la

Définition I.2.11

Soit L une ℓ-forme vectorielle semi-basique sur TM . La trace semi-basique ou contractée $\tilde{L}$ de L est la ℓ-1-forme scalaire semi-basique sur TM définie par récurrence de la façon suivante :

i) pour une 1-forme vectorielle

$$L = \ell_j^{i^*} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^i} \quad .$$

$\widetilde{L} = \ell_i^{i^*}$ est une fonction scalaire.

En effet, soit un changement de carte défini par la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} A_j^{i'} & 0 \\ A_j^{i'^*} & A_{j^*}^{i'^*} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{j^*}^{i'^*} = A_j^{i'} \quad , \text{ et}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{j'}^{i} & 0 \\ A_{j'}^{i^*} & A_{j^*}^{i^*} \end{pmatrix} \quad .$$

Alors,

$$\ell_{i'}^{i'^*} = A_j^{i'^*} A_{i'}^K \ell_K^j + A_{j^*}^{i'^*} A_{i'}^K \ell_K^{j^*} + A_{j^*}^{i'^*} A_{i'}^{K^*} \ell_{K^*}^{j^*} = A_{j^*}^{i'^*} A_{i'}^K \ell_K^{j^*} = A_j^{i'} A_{i'}^K \ell_K^{j^*}$$

$$= \delta_j^K \ell_K^{j^*} = \ell_j^{j^*} \quad .$$

ii) pour une ℓ-forme vectorielle L, $\ell > 1$

$$i_X \widetilde{L} = \widetilde{i_X L} \quad , \quad X \in \chi(TM) \quad .$$

On peut démontrer que si $\Gamma = [J,S]$ est une connexion sur M et si F est la structure presque complexe associée à Γ, alors une définition équivalente de $\widetilde{L}$ est la suivante :

i) $\widetilde{L}$ = trace de l'endomorphisme $(F \circ L)$ si L est une 1-forme

ii) $i_X \widetilde{L} = \widetilde{i_X L}$ où $X \in \chi(TM)$ si L est une ℓ-forme, $\ell > 1$.

En utilisant des coordonnées locales naturelles, on peut voir que $\widetilde{L}$ ne dépend pas du choix de la connexion Γ .

On peut vérifier que $\widetilde{J} = n$ et que si L est une 1-forme vectorielle semi-basique sur TM, ω une p-forme scalaire semi-basique sur TM $(p \geq 1)$ alors pour tout X, champ de vecteurs, on a

$$\widetilde{\omega \otimes LX} = (-1)^{p+1} i_{FLX}\omega$$

On peut en déduire que

$$\widetilde{\omega \wedge L} = \widetilde{L}\omega + (-1)^{p} i_{FL}\omega$$

Cas particuliers.

Soit $L = J$, $X = C$ le champ canonique.

Alors

$$\widetilde{\omega \otimes C} = (-1)^{p+1} i_{S}\omega$$

$$\widetilde{\omega \wedge J} = (n-p)\omega$$

I.3 - FORMULAIRE DES CROCHETS DES FORMES VECTORIELLES

Dans cette section, X, Y, Y_i désigneront des champs de vecteurs sur une variété M, f, g des fonctions différentiables, L et N des formes vectorielles de degré ℓ et n resp., ω et π des formes scalaires de degré p et q resp.

On établit facilement, à l'aide des formules

$$[X, fY] = (X.f)Y + f[X, Y] \qquad \text{et}$$

$$[X, L](Y_1, \ldots, Y_\ell) = [X, L(Y_1, \ldots, Y_\ell)] - \sum_i L(Y_1, \ldots, [X, Y_i], \ldots, Y_\ell)$$

que

$$[X,fL] = f[X,L] + (X.f)L \quad . \tag{I.3.1}$$

De même,

$$\begin{aligned}
[L,fX](Y_1,\ldots,Y_\ell) &= [L(Y_1,\ldots,Y_\ell),fX] - \sum_i L(Y_1,\ldots,[Y_i,fX],\ldots,Y_\ell) \\
&= f[L(Y_1,\ldots,Y_\ell),X] + (L(Y_1,\ldots,Y_\ell).f)X - \sum_i L(Y_1,\ldots,[Y_i,fX],\ldots,Y_\ell) \\
&= (L(Y_1,\ldots,Y_\ell).f)X + f[L(Y_1,\ldots,Y_\ell),X] \\
&\quad - \sum_i L(Y_1,\ldots,(Y_i.f)X,\ldots,Y_\ell) - \sum_i L(Y_1,\ldots,f[Y_i,X],\ldots,Y_\ell) \\
&= \{f[L,X] + d_L f \otimes X - df \wedge i_X L\}(Y_1,\ldots,Y_\ell) \quad .
\end{aligned}$$

Donc,

$$[fX,L] = f[X,L] + df \wedge i_X L - d_L f \otimes X \quad . \tag{I.3.2}$$

On peut vérifier également que :

$$[L,fN] = f[L,N] + d_L f \wedge N - df \wedge LN \tag{I.3.3}$$

$$[gL,fX] = g(d_L f \otimes X - df \otimes LX) - f(X.g)L + gf[L,X] \tag{I.3.4}$$

et plus généralement

$$[fL,gN] = fg[L,N] + fd_L g \wedge N - fdg \wedge LN + gd_N f \wedge L - gdf \wedge NL \quad . \tag{I.3.5}$$

Un cas particulier de cette dernière expression est :

$$[fL,fL] = f^2[L,L] + 2d_L f \wedge L - 2fdf \wedge L^2 \quad . \tag{I.3.6}$$

En ce qui concerne le produit extérieur d'une forme scalaire et d'une forme vectorielle, nous avons :

$$[X,\omega \wedge L] = \mathfrak{L}_X \omega \wedge L + \omega \wedge [X,L] \quad . \tag{I.3.7}$$

En effet,

$$[X,\omega\wedge L](Y_1,\dots,Y_{p+\ell}) = [X,\omega\wedge L(Y_1,\dots,Y_{p+\ell})] - \sum_i \omega\wedge L(Y_1,\dots,[X,Y_i],\dots,Y_{p+\ell})$$

$$= \frac{1}{p!\,\ell!}\sum_\sigma |\sigma|\,[X,\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)})]$$
$$- \frac{1}{p!\,\ell!}\sum_i\sum_\sigma |\sigma|\,\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,[X,Y_{\sigma(i)}],\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+1)}$$
$$- \frac{1}{p!\,\ell!}\sum_i\sum_\sigma |\sigma|\,\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,[X,Y_{\sigma(p+i)}],\dots,Y_{\sigma(p+\ell}$$

$$= \frac{1}{p!\,\ell!}\sum_\sigma |\sigma|\,\{(X.\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)}$$
$$+ \omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})[X.L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)}]$$
$$- \sum_i \omega(Y_{\sigma(1)},\dots,[X,Y_{\sigma(i)}],\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)})$$
$$- \sum_i \omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+i)},\dots,[X,Y_{\sigma(p+i)}],\dots,Y_{\sigma(p+\ell)})\}$$

$$= \frac{1}{p!\,\ell!}\sum_\sigma |\sigma|\,\{\mathfrak{L}_X\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})L(Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)})$$
$$+ \omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(p)})[X,L](Y_{\sigma(p+1)},\dots,Y_{\sigma(p+\ell)})\}$$

$$= \{\mathfrak{L}_X\omega\wedge L + \omega\wedge[X,L]\}(Y_1,\dots,Y_{p+\ell}) .$$

On démontre de même :

(I.3.8) $$[L,\omega\wedge N] = d_L\omega\wedge N - d\omega\wedge LN + \omega\wedge[L,N] .$$

(I.3.9) $$[X,\omega\otimes Y] = \mathfrak{L}_X\omega\otimes Y + [X,Y]\otimes\omega .$$

(I.3.10) $$[L,\omega\otimes Y] = d_L\omega\otimes Y - d\omega\otimes LY + (-1)^p\omega\wedge[L,Y] .$$

(I.3.11) $$[\omega\otimes X,\pi\otimes Y] = \omega\wedge\mathfrak{L}_X\pi\otimes Y - i_Y\omega\wedge d\pi\otimes X + \omega\wedge\pi\otimes[X,Y] + \pi\wedge\mathfrak{L}_Y\omega\otimes X - i_X\pi\wedge d\omega\otimes Y .$$

On a, comme cas particulier,

(I.3.12) $$\frac{1}{2}[\omega\otimes X,\omega\otimes X] = \omega\wedge\mathfrak{L}_X\omega\otimes X - d\omega\wedge i_X\omega\otimes X .$$

(I.3.13) $$i_{\omega\otimes X}\pi = \omega\wedge i_X\pi \quad , \text{ et donc}$$

(I.3.14) $$d_{\omega\otimes X}\pi = \omega\wedge\mathfrak{L}_X\pi - d\omega\wedge i_X\pi$$

(I.3.15) $$i_{\omega\wedge J}\pi = \omega\wedge i_J\pi$$

(I.3.16) $$d_{\omega\wedge J}\pi = \omega\wedge d_J\pi - d\omega\wedge i_J\pi .$$

CHAPITRE II

TENSEUR DE WEYL

II.1 - CHANGEMENT PROJECTIF

Dans la suite, M sera une variété différentiable, réelle, de classe C^∞, de dimension finie n, paracompacte.

Soit S un spray sur M. On définit un spray sur M $(\bar{S})$ par la formule suivante :

$$\bar{S} = S + \lambda C \qquad (II.1.1)$$

où λ est une fonction sur TM, homogène de degré 1, C^∞ sur $\mathcal{T}M = TM - \{0\}$ et C^1 sur la section nulle, C étant le champ canonique.

Définition.

On dira que (II.1.1) représente un changement projectif du spray S.

D'après la terminologie de Klein-Voutier [8], S et $\bar{S}$ sont équivalents, une classe d'équivalence étant appelée un spray de directions.

Si f est une géodésique de S, il existe un changement de paramètre strictement croissant, tel que $f \circ g$ soit une géodésique du spray $\bar{S}$. Un spray de directions sur M définit donc sur M des courbes géométriques appelées géodésiques du spray de directions.

f géodésique de S est une solution du système différentiel

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + 2G^\alpha\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

(resp. $\bar{f}$ géodésique de $\bar{S}$ est une solution du système différentiel

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + 2\bar{G}^\alpha(x, \frac{dx}{dt}) = 0 \ )$$

où l'on a supposé que

$$S = (x^\alpha, y^\alpha, y^\alpha, -2G^\alpha(x, \frac{dx}{dt})) \quad (\text{resp. } \bar{S} = (x^\alpha, y^\alpha, y^\alpha, -2\bar{G}^\alpha(x, \frac{dx}{dt}))$$

t (resp. $\bar{t}$) un paramètre

et

$$f = (x^\alpha(t)) \quad (\text{resp. } \bar{f} = (x^\alpha(\bar{t})) \ .$$

Les paramètres t et $\bar{t}$ des équations des géodésiques sont liés par une relation de la forme

$$\bar{t} = A + B\int e^{-2\int\lambda dt}dt \qquad (II.1.2)$$

où A et B sont des constantes.

Pour vérifier ceci, il suffit de faire dans les équations des géodésiques, en plus du changement projectif, une transformation du paramètre t, $\bar{t} = \bar{t}(t)$. On obtient ainsi une équation différentielle de $\bar{t}$ en fonction de t dont la solution est donnée par (II.1.2) .

Dans tout ce travail quand on dit que deux sprays sont équivalents, il est sous-entendu qu'ils sont équivalents au sens de M. Klein et M. Voutier.

II.2 - TENSEUR DE WEYL

Nous allons déterminer un tenseur qui soit invariant par rapport aux représentants d'un spray de directions.

Dans ce but, nous étudierons les connexions associées à deux représentants d'un spray de directions, ainsi que leurs courbures, potentiels, etc...

Soient S et $\bar{S}$ deux sprays équivalents sur M, c'est-à-dire, tels que

$$\bar{S} = S + \lambda C \ .$$

Propriété II.2.1.

La connexion $\bar{\Gamma} = [J,\bar{S}]$ s'exprime en fonction de la connexion $\Gamma = [J,S]$ comme suit :

$$\boxed{\bar{\Gamma} = \Gamma + \lambda J + d_J\lambda\otimes C} \quad .$$

En effet,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} &= [J,\bar{S}] \\ &= [J,S+\lambda C] \\ &= [J,S] + \lambda J + d_J\lambda\otimes C \ .\end{aligned}$$

Remarque II.2.2 :

Γ et $\bar{\Gamma}$ sont sans torsion et elles sont homogènes de degré 1 .

Cherchons maintenant l'expression de la courbure $\bar{R}$ de la connexion $\bar{\Gamma}$ en fonction de R, courbure de la connexion Γ .

Propriété II.2.3.

$$\boxed{\bar{R} = R + \frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda) \wedge J + \frac{1}{2} d_h d_J\lambda \otimes C}$$

h étant le projecteur horizontal de la connexion Γ .

On a

$$\begin{aligned}\bar{R} &= +\frac{1}{2}[\bar{h},\bar{h}] \\ &= +\frac{1}{8}[I+\Gamma+\lambda J+d_J\lambda\otimes C, I+\Gamma+\lambda J+d_J\lambda\otimes C] \ .\end{aligned}$$

Or

$$[\bar{h},\bar{h}] = [h,h] + [h,\lambda J] + [h,d_J\lambda\otimes C] + \frac{1}{2}[\lambda J, d_J\lambda\otimes C] + \frac{1}{4}[\lambda J,\lambda J]$$
$$= [h,h] + d_h\lambda\wedge J + d_h d_J\lambda\otimes C + \frac{1}{4}d_J\lambda^2\wedge J \quad .$$

Donc

$$\bar{R} = R + \frac{1}{8}(4d_h\lambda + d_J\lambda^2)\wedge J + \frac{1}{2}d_h d_J\lambda\otimes C \quad .$$

Propriété II.2.4.

Posons $r = \frac{\tilde{R}^\circ}{n-1}$. Alors,

$$\boxed{\bar{r} - r = \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{L}_S\lambda} \quad .$$

Calculons d'abord $\bar{R}^\circ$, le potentiel de $\bar{R}$.

De la propriété II.2.3 on déduit que

$$\bar{R}^\circ = R^\circ + \frac{1}{8}(4i_S d_h\lambda + i_S d_J\lambda^2)\wedge J - \frac{1}{8}(4d_h\lambda + d_J\lambda^2)\otimes C + \frac{1}{2}i_S d_h d_J\lambda\otimes C \quad .$$

Or λ étant homogène de degré 1 ,

$$i_S d_J\lambda^2 = i_J d\lambda^2(S) = d\lambda^2(C) = 2\lambda^2 \quad .$$

En outre :

$$i_S d_h\lambda = i_h d\lambda(S) = d\lambda(S) = \mathfrak{L}_S\lambda \quad .$$

Enfin, nous obtenons en substituant,

$$\bar{R}^\circ = R^\circ + \frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\mathfrak{L}_S\lambda)J - \frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda - 4i_S d_h d_J\lambda)\otimes C \quad .$$

Nous allons calculer maintenant $\tilde{\bar{R}}^\circ$.

$$\tilde{\bar{R}}^\circ = \tilde{R}^\circ + \frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\mathfrak{L}_S\lambda)\tilde{J} - \frac{1}{8}\overbrace{(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda - 4i_S d_h d_J\lambda)\otimes C} \quad .$$

D'après les formules de la section I.2, page 10 nous savons que $\tilde{J} = n$;

$$\frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda - 4i_S d_h d_J\lambda)\otimes C = \frac{1}{8}(i_S d_J\lambda^2 + 4i_S d_h\lambda)$$
$$= \frac{1}{8}(2\lambda^2 + 4\mathfrak{L}_S\lambda)$$
$$= \frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\mathfrak{L}_S\lambda) \quad .$$

En substituant, nous obtenons :

$$\tilde{\bar{R}} = \tilde{R} + \frac{n-1}{4}(\lambda^2 + 2\mathfrak{L}_S\lambda)$$

d'où la propriété.

Comme conséquence des propriétés précédentes, on a

Corollaire II.2.5.

$$\boxed{\bar{R} - \bar{r}J - (R - rJ) = \alpha\otimes C}$$

où $\alpha = -\frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda - 4i_S d_h d_J\lambda)$.

La vérification est immédiate.

Propriété II.2.6.

$$\boxed{\tilde{\bar{R}} + d_J\bar{r} = \tilde{R} + \frac{(n+1)}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda) + d_J r}$$

Remarquons d'abord que la propriété II.2.3 peut être écrite comme suit :

$$\bar{R} = R + \beta\wedge J - d_J\beta\otimes C$$

où $\beta = \frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda)$ car

$$d_J\beta = \frac{1}{8}(4d_J d_h\lambda)$$
$$= -\frac{1}{2}(d_h d_J\lambda) \quad .$$

On a alors

$$\tilde{\bar{R}} = \tilde{R} + (n-1)\beta + i_S d_J\beta$$
$$= \tilde{R} + (n+1)\beta - d_J i_S\beta$$
$$= \tilde{R} + (n+1)\beta - d_J(\bar{r} - r) \quad .$$

car $i_S\beta = \frac{1}{4}(\lambda^2 + 2\mathfrak{L}_S\lambda) = \bar{r} - r$ en vertu de la propriété II.2.4.

Corollaire II.2.7.

Soit β définie précédemment, alors

$$\beta = \frac{1}{n+1}(\tilde{\bar{R}} - \tilde{R} + d_J(\bar{r} - r)) \ .$$

Proposition II.2.8.

Soit α définie par

$$\alpha = -\frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda - 4i_S d_h d_J\lambda) \ .$$

Alors

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{n+1}(3\tilde{\bar{R}} - 3\tilde{R} + (2-n)(d_J\bar{r} - d_J r))} \ .$$

Du corollaire II.2.5 on déduit que

$$\bar{R}^\circ - \bar{r}J - (R^\circ - rJ) = \alpha \otimes C \ .$$

Calculons le crochet avec J :

$$[J, \bar{R}^\circ] - [J, rJ] = [J, R^\circ] - [J, rJ] - [J, \alpha \otimes C] \ . \qquad (I.2.9)$$

Puisque R (resp. $\bar{R}$) est une 2-forme vectorielle semi-basique, homogène de degré 1, on a

$$R = \frac{1}{3}([J, R]^\circ + [J, R^\circ])$$

$$= \frac{1}{3}[J, R^\circ]$$

car $[J, R] = [h, t] = 0$ (resp. $[J, \bar{R}] = [h, \bar{t}] = 0$) .

Donc (II.2.9) équivaut à

$$3\bar{R} - d_J\bar{r} \wedge J = 3R - d_J r \wedge J + \alpha \wedge J - d_J\alpha \otimes C \ .$$

Or,

$$3\tilde{\bar{R}} - \widetilde{d_J\bar{r}\wedge J} = 3\tilde{R} - \widetilde{d_J r\wedge J} + \widetilde{\alpha\wedge J} - \widetilde{d_J\alpha\otimes C} \quad . \qquad \text{(II.2.10)}$$

D'après la définition de $\sim$, (II.2.10) est égal à

$$\begin{aligned} 3\tilde{\bar{R}} - (n-1)d_J\bar{r} &= 3\tilde{R} - (n-1)d_J r + (n-1)\alpha + i_S d_J\alpha \\ &= 3\tilde{R} - (n-1)d_J r + (n-1)\alpha + (\mathfrak{L}_C\alpha - i_r\alpha - d_J\alpha^\circ) \\ &= 3\tilde{R} + (1-n)d_J r + (n+1)\alpha - d_J\alpha^\circ \quad . \end{aligned}$$

Or d'après la propriété (II.2.4) on a :

$$\begin{aligned} \alpha^\circ &= \frac{1}{8}(i_S d_J\lambda^2 + 4 i_S d_h\lambda) \\ &= \frac{1}{4}(\lambda^2 + \mathfrak{L}_S\lambda) \\ &= \bar{r} - r \quad . \end{aligned}$$

Donc, on a

$$3\tilde{\bar{R}} + (1-n)d_J\bar{r} = 3\tilde{R} + (1-n)d_J r + (n+1)\alpha - d_J(\bar{r}-r) \quad ,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n+1}(3\tilde{\bar{R}} + (2-n)d_J\bar{r}) = \frac{1}{n+1}(3\tilde{R} + (2-n)d_J r) + \alpha$$

d'où la propriété.

Proposition (II.2.11).

Le tenseur

$$\boxed{W = R^\circ - rJ + \frac{3\tilde{R} + (2-n)d_J r}{n+1}\otimes C}$$

est invariant par rapport aux représentants d'un spray de directions. C'est un invariant par rapport aux changements projectifs du spray S .

Il suffit de vérifier que

$$\bar{W} = W \quad .$$

$$\bar{W} = \bar{R}^\circ - \bar{r}J + \frac{3\tilde{\bar{R}} + (2-n)d_J\bar{r}}{n+1} \otimes C$$

$$= R^\circ - rJ - \frac{1}{n+1}(3(\tilde{\bar{R}} - \tilde{R}) + (2-n)d_J(\bar{r}-r)) \otimes C + \frac{1}{n+1}(3\tilde{\bar{R}} + (2-n)d_J\bar{r}) \otimes C$$

$$= R^\circ - rJ + \frac{3\tilde{R} + (2-n)d_Jr}{n+1} \otimes C$$

$$= W \ .$$

D'où la proposition.

Remarque (II.2.12) :

Le tenseur W , défini par la proposition précédente, a été introduit par Weyl. On l'appellera donc tenseur de Weyl.

Le tenseur de Weyl est une 1-forme vectorielle semi-basique, et du fait que

$$[C, W] = W$$

il est homogène de degré 2.

Proposition (II.2.13).

Le crochet de W avec J est encore un tenseur invariant par rapport aux représentants d'un spray de directions.

$$[J, W] = [J, R^\circ] - [J, rJ] + \frac{1}{n+1}[J, 3\tilde{R} + (2-n)d_Jr]$$

$$= 3R - d_Jr \wedge J - \frac{1}{n+1}(3\tilde{R} + (2-n)d_Jr) \wedge J + d_J\left(\frac{3\tilde{R} + (2-n)d_Jr)}{n+1}\right) \otimes C$$

$$= 3(R - \frac{1}{n+1}(\tilde{R} + d_Jr) \wedge J + \frac{1}{n+1} d_J\tilde{R} \otimes C)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{3}[J, W] = R - \frac{1}{n+1}((\tilde{R} + d_Jr) \wedge J - d_J\tilde{R} \otimes C) \ .$$

On va noter :

$$W_1 = \frac{1}{3}[J, W] \ .$$

$$\boxed{W_1 = R - \frac{1}{n+1}((\tilde{R} + d_Jr) \wedge J - d_J\tilde{R} \otimes C)} \ .$$

II.3 - PROPRIETES.

Propriété II.3.1.

Le potentiel de W_1 est le tenseur de Weyl. On en déduit que

$$W^\circ = 0 \ .$$

En effet,

$$W_1^\circ = R^\circ - \frac{1}{n+1}(\widetilde{R^\circ} + i_S d_J r) \wedge J + \frac{1}{n+1}(\widetilde{R} + d_J r) \otimes C + \frac{1}{n+1} i_S d_J \widetilde{R} \otimes C$$

$$= R^\circ - \frac{1}{n+1}(\widetilde{R^\circ} + 2r) \wedge J + \frac{1}{n+1}(\widetilde{R} + d_J r) \otimes C + \frac{1}{n+1}(-d_J i_S + \mathfrak{L}_C + i_T)\widetilde{R} \otimes C$$

$$= R^\circ - \frac{(n-1)r+2r}{n+1} \wedge J + \frac{\widetilde{R} + d_J r - d_J \widetilde{R^\circ} + 2\widetilde{R}}{n+1} \otimes C$$

$$= R^\circ - rJ + \frac{1}{n+1}(3\widetilde{R} + (2-n)d_J r) \otimes C$$

$$= W \ .$$

Propriété II.3.2.

La trace semi-basique de W est nulle.

$$\widetilde{W} = 0 \ .$$

On sait que

$$W = R^\circ - rJ + \frac{3\widetilde{R} + (2-n)d_J r}{n+1} \otimes C \ .$$

Pour faciliter les calculs, on va noter

$$\omega = \frac{3\widetilde{R} + (2-n)d_J r}{n+1} \ .$$

L'expression du tenseur de Weyl est alors

$$W = R^\circ - rJ + \omega \otimes C \ .$$

Remarquons d'abord que

$$\omega^\circ = \frac{3(n-1)r + 2(2-n)r}{n+1} = r \ .$$

On a alors

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= \widetilde{R}^\circ - nr + \omega^\circ \\ &= (n-1)r - nr + r \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où la propriété.

Propriété II.3.3.

Le tenseur de Weyl est nul si et seulement si W_1 l'est aussi.

Ceci est évident à partir de la première propriété (II.3.1).

Remarquons que de cette même propriété on déduit que :

$$\widetilde{W}_1^\circ = \widetilde{W} = 0 \ .$$

Donc on a démontré que

$$\boxed{\widetilde{W}_1^\circ = 0} \ .$$

Propriété II.3.4.

$\widetilde{W}_1$, trace semi-basique du tenseur W_1 , est nul.

En effet, puisque

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{3}[J, W] \\ &= R - \frac{1}{n+1}((\widetilde{R} + d_J r)\wedge J - d_J \widetilde{R} \otimes C) \\ &= R - (\mathcal{J}\wedge J - d_J \mathcal{J} \otimes C) \end{aligned}$$

si l'on pose $\mathcal{J} = \dfrac{\widetilde{R} + d_J r}{n+1}$.

Alors

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1 &= \widetilde{R} - (n-1)\mathcal{I} - i_S d_J \mathcal{I} \\ &= \widetilde{R} - (n-1)\mathcal{I} - (2\mathcal{I} - d_J \mathcal{I}^\circ) \\ &= \widetilde{R} - (n+1)\mathcal{I} + d_J \mathcal{I}^\circ \quad .\end{aligned}$$

Mais $\mathcal{I}^\circ = r$ donc

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_1 &= \widetilde{R} + d_J r - (n+1)\mathcal{I} \\ &= \widetilde{R} + d_J r - \frac{(n+1)}{(n+1)}(\widetilde{R} + d_J r) \\ &= 0 \quad .\end{aligned}$$

CHAPITRE III

VARIETES PROJECTIVEMENT PLATES

III.1 - DEFINITIONS

Soit M une variété munie d'une connexion sans torsion $\Gamma = [J,S]$.

Définition III.1.1.

On dira que M est plate si le tenseur de courbure associé à Γ est nul.

Définition III.1.2.

S'il existe un représentant $\overline{S}$ du spray de directions associé à S, tel que le tenseur de courbure de $\overline{\Gamma} = [J,\overline{S}]$ soit nul, la variété M est dite projectivement plate.

Ceci correspond à un changement projectif du spray S, d'où la terminologie.

Nous allons démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété soit projectivement plate est que son tenseur de Weyl associé soit nul.

III.2 - NULLITE DU TENSEUR DE WEYL ET QUELQUES APPLICATIONS

Reprenons notre variété M avec une connexion $\Gamma = [J,S]$.

Proposition III.2.1.

Le tenseur de Weyl est nul si et seulement si il existe une 1-forme scalaire semi-basique σ telle que le tenseur de courbure R de Γ soit de la forme

$$R = \sigma \wedge J - d_J\sigma \otimes C .$$

Démonstration :

Supposons $W = 0$.

De la propriété II.3.3, nous avons que :

$$W = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W_1 = 0 .$$

Alors, $R = \frac{1}{n+1}(\widetilde{R} + d_J r) \wedge J - \frac{1}{n+1} d_J \widetilde{R} \otimes C$.

$\sigma = \frac{1}{n+1}(\widetilde{R} + d_J r)$ est bien une 1-forme scalaire semi-basique cherchée.

Inversement, supposons qu'il existe une 1-forme scalaire semi-basique telle que R soit de la forme :

$$R = \sigma \wedge J - d_J\sigma \otimes C .$$

Alors,

$$R^\circ = \sigma^\circ \wedge J - \sigma \otimes C - i_S d_J \sigma \otimes C \quad ;$$

$$\widetilde{R} = (n-1)\sigma + i_S d_J \sigma \quad ;$$

$$\widetilde{R}^\circ = (n-1)\sigma^\circ ,$$

c'est-à-dire,

$$r = \sigma^\circ .$$

Si on substitue dans l'expression du tenseur de Weyl :

$$W = R^{\circ} - rJ + \frac{1}{n+1}(3\tilde{R} + (2-n)d_J r) \otimes C \quad ,$$

on a :

$$W = \sigma^{\circ} \wedge J - \sigma \otimes C - i_S d_J \sigma \otimes C - \sigma^{\circ} \wedge J$$
$$+ \frac{1}{n+1}(3(n-1)\sigma + 3i_S d_J \sigma + (2-n)d_J \sigma^{\circ}) \otimes C$$

$$W = (\frac{2(n-2)}{n+1}\sigma - \frac{n-2}{n+1} i_S d_J \sigma - \frac{n-2}{n+1} d_J i_S \sigma) \otimes C$$
$$= \frac{n-2}{n+1}(2\sigma - i_S d_J \sigma - d_J i_S \sigma) \otimes C \ .$$

Mais,

$$i_S d_J \sigma + d_J i_S \sigma = d_C \sigma + i_{\Gamma} \sigma = \sigma - 2i_v \sigma + i_I \sigma = 2\sigma \quad ,$$

donc,

$$W = 0 \ .$$

Théorème III.2.2.

Soit M une variété différentielle réelle, paracompacte, de dimension $n > 2$. Soit $\Gamma = [J,S]$ une connexion sur M . Une condition nécessaire et suffisante pour que M soit projectivement plate est que le tenseur de Weyl associé à (M,Γ) soit nul.

Démonstration :

Nous allons démontrer qu'il existe un changement projectif $\bar{S} = S + \lambda C$ du spray S tel que le tenseur de courbure $\bar{R}$ de $\bar{\Gamma} = [J,\bar{S}]$ soit nul si et seulement si $W = 0$.

Supposons d'abord qu'il existe un changement projectif $\bar{S} = S + \lambda C$ du spray S , λ étant une fonction homogène de degré un, tel que

$$\bar{R} = R + \frac{1}{8}(d_J \lambda^2 + 4d_h \lambda) \wedge J + \frac{1}{2}(d_h d_J \lambda) \otimes C = 0$$

où h est le projecteur horizontal de Γ .

Posons

$$\beta = -\frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda) \quad .$$

Alors

$$+R = \beta\wedge J - d_J\beta\otimes C \quad .$$

D'après la proposition II.2.1, ceci équivaut à $W = 0$.

Inversement, supposons que $W = 0$. D'après la même proposition III.2.1, nous savons qu'il existe une 1-forme scalaire semi-basique β telle que

$$R = \beta\wedge J - d_J\beta\otimes C$$

où $\beta = \frac{1}{n+1}(\tilde{R} + d_J r)$.

S'il existe λ fonction homogène de degré un telle que

$$-\beta = \frac{1}{8}(d_J\lambda^2 + 4d_h\lambda) \qquad \text{(III.2.3)}$$

alors le tenseur de courbure associé à $\bar{S} = S + \lambda C$ est nul.

La condition pour que (III.2.3) soit complètement intégrable est [9]

$$d_h\beta = 0 \quad . \qquad \text{(III.2.4)}$$

Nous allons donc nous borner à démontrer (III.2.4). Remplaçons dans l'identité de Bianchi $[h,R] = 0$, R en fonction de β , d'où

$$[h,\beta\wedge J] - [h,d_J\beta\otimes C] = 0 \ .$$

$$d_h\beta\wedge J - d\beta\wedge hJ - \beta\wedge[h,J] - d_h d_J\beta\otimes C - dd_J\beta\otimes hC + d_J\beta\wedge[h,C] = 0$$

$$d_h\beta\wedge J + d_J d_h\beta\otimes C = 0 \ .$$

Si nous posons $\Omega = d_h\beta$ alors

$$\Omega\wedge J + d_J\Omega\otimes C = 0 \qquad \text{(III.2.5)}$$

$$\widetilde{\Omega\wedge J} + \widetilde{d_J\Omega\otimes C} = (n-2)\Omega + i_S d_J\Omega = 0 \quad .$$

Mais Ω étant une 2-forme semi-basique, homogène de degré un ,

$$i_S d_J \Omega + d_J i_S \Omega = 3\Omega \qquad [8]$$

donc

$$(n-2)\Omega - d_J \Omega^{\circledast} + 3\Omega = 0$$

$$(n+1)\Omega - d_J \Omega^{\circledast} = 0 ,$$

d'où

$$d_J \Omega = 0 .$$

La formule (III.2.5) donne alors

$$\Omega \wedge J = 0$$

donc

$$\widetilde{\Omega \wedge J} = (n-2)\Omega = 0$$

c'est-à-dire

$$\Omega = d_h \beta = 0 .$$

III.3 - VARIETES FINSLERIENNES PARTICULIERES

Soit (M,E) une variété finslérienne de dimension $n > 2$ et $\Gamma = [J,S]$ la connexion canonique à torsion forte nulle, homogène de degré un . On note

$$\bar{g}(X,Y) = g(JX,JY) + g(vX,vY)$$

le prolongement de la métrique finslérienne g suivant Γ .

Définition III.3.1.

Soit x un point de M , P un 2-plan tangent en x et y un vecteur de P non nul. Soit Z un vecteur de P non collinéaire à y .

La courbure sectionnelle de P relativement à $y \in P$ est donnée par la formule

$$K_y(P) = \frac{\bar{g}(R^{\circledast}(Z),Z)}{\|S \wedge Z\|^2} .$$

où Z est un vecteur tangent en y à TM se projetant sur $\tilde{Z}$ et où

$$\|S \wedge Z\|^2 = \bar{g}(S,S)\bar{g}(Z,Z) - (\bar{g}(S,Z))^2$$

K ne dépend que de y et de P [1] .

Remarque.

On peut exprimer la courbure sectionnelle par une autre formule à l'aide du relèvement normal canonique $\overset{\circ}{D}$ dit relèvement de Berwald [5].

La courbure $\mathbf{R}$ de $\overset{\circ}{D}$ est déterminée par les trois tenseurs semi-basiques :

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \mathbf{R}(hX,hY)JZ$$
$$\mathcal{P}(X,Y)Z = \mathbf{R}(hX,JY)JZ$$
$$Q(X,Y)Z = \mathbf{R}(JX,JY)JZ \ .$$

On peut vérifier ([5]) que

$$\mathcal{R}(X,Y)Z = \theta_J R(Z,X,Y)$$

où $\theta_J R(Z,X,Y) = J\,[JZ,FR](X,Y)$.

F étant la structure presque complexe associée à Γ .

Or

$$\mathcal{R}(X,Y,S) = (\theta_J R)^{\circ}(X,Y)$$
$$= (R + [C,R])(X,Y)$$
$$= R(X,Y)$$

donc

$$\mathcal{R}(S,Y,S) = R^{\circ}(Y) \ .$$

La courbure sectionnelle peut alors s'exprimer par

$$K = \frac{\mathcal{R}(S,Z,S,Z)}{G(S,Z,S,Z)}$$

si on pose

$$\bar{g}(\mathcal{R}(S,Z)S,Z) = \mathcal{R}(S,Z,S,Z)$$

et

$$G(S,Z,S,Z) = \bar{g}(S,S)\bar{g}(Z,Z) - (g(S,Z))^2 \ .$$

Définition III.3.3.

Un point $x \in M$ est isotrope si la courbure sectionnelle K en ce point est indépendante du plan P contenant y. M est isotrope si tous ses points sont isotropes, c-à-d si K est une application de TM dans $\mathbb{R}$.

On peut vérifier [9] que la condition pour qu'une variété soit isotrope est

$$R^{\circledcirc} = (2EK)J - Kd_JE \otimes C .$$

Théorème III.3.4.

Si (M,E) est isotrope et si $d_JK = 0$, alors K est constante sur M.

Ce théorème nous amène à poser la

Définition III.3.5.

M est à courbure constante si K est indépendante de y et de P.

Démonstration du théorème III.3.4 :

$$R^{\circledcirc} = (2EK)J - Kd_JE \otimes C .$$

Le crochet de cette expression avec J donne

$$[J,R^{\circledcirc}] = 2[J,(EK)J] - [J,Kd_JE \otimes C]$$

$$= 2d_J(EK) \wedge J - Kd_JE \wedge [J,C] - d_J(Kd_JE) \otimes C$$

c'est-à-dire

$$3R = (2d_J(EK) - Kd_JE) \wedge J = Kd_JE \wedge J .$$

Or, la deuxième identité de Bianchi $[h,R] = 0$ nous donne

$$[h,Kd_JE \wedge J] = 0$$

c'est-à-dire

$$d_h(Kd_JE) \wedge J = 0$$

$$\widetilde{d_h(Kd_JE)\wedge J} = (n-2)d_h(Kd_JE) = 0$$

donc

$$d_hK\wedge d_JE = 0 \ .$$

Supposons

$$d_hK = fd_JE \ .$$

Puisque

$$d_Jd_hK = -d_hd_JK = 0 \ ,$$

alors

$$d_hK = d_Ji_Sd_hK = d_J\mathfrak{L}_SK = d_\Gamma K \qquad [8]$$

c'est-à-dire

$$d_vK = 0 \ ,$$

et donc

$$d_hK = dK \ .$$

Ceci implique que la forme fd_JE est fermée :

$$df\wedge d_JE + fdd_JE = 0$$

c'est-à-dire

$$dd_JE = -\frac{df}{f} \wedge d_JE$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, dd_JE étant de rang maximum [5], donc

$$dK = 0 \ .$$

Propriété III.3.6.

Si M est à courbure constante, alors

$$R^\circledcirc = rJ - \frac{1}{2}\, d_Jr\otimes C$$

où $r = \dfrac{\widetilde{R^\circledcirc}}{n-1}$.

En effet, puisque

$$R^\circledcirc = (2EK)J - Kd_JE\otimes C$$

alors

$$\widetilde{R^\circledcirc} = (2EK)n - 2EK = (n-1)2EK$$

donc

$$r = 2EK \ .$$

Proposition III.3.7.

Sur une variété isotrope (M,E) le tenseur de Weyl est nul, c'est-à-dire (M,E) est projectivement plate.

Démonstration : Ce fait est une conséquence directe de la proposition III.2.1, car

$$R = \delta \wedge J - d_J \delta \otimes C$$

où $\delta = \frac{1}{3}(2d_J(EK) + Kd_J E)$.

Théorème III.3.8.

Soit (M,E) une variété à courbure constante. Alors $d_J \tilde{R} = 0$. Inversement, si (M,E) est projectivement plate et si $d_J K = 0$, alors $d_J \tilde{R} = 0$ entraîne que M est à courbure constante.

Démonstration : En effet, supposons M à courbure constante. On a alors

$$R^{\circledcirc} = rJ - \frac{1}{2} d_J r \otimes C \ .$$

Le crochet de cette expression avec J donne

$$R = \frac{1}{2} d_J r \wedge J$$

c'est-à-dire,

$$\tilde{R} = \frac{(n-1)}{2} d_J r$$

d'où

$$d_J \tilde{R} = 0 \ .$$

Inversement, supposons que $d_J \tilde{R} = 0$.

Puisque

$$i_S d_J \tilde{R} + d_J i_S \tilde{R} = 2\tilde{R} \qquad [8]$$

on en déduit

$$\frac{(n-1)}{2} d_J r = \tilde{R} \ .$$

Mais M est projectivement plate, donc

$$R^{\circledcirc} - rJ = -\frac{1}{n+1} \left(\frac{3(n-1)+2(2-n)}{2}\right) d_J r \otimes C = -\frac{1}{2} d_J r \otimes C$$

$$R^{\circledcirc} = rJ - \frac{1}{2} d_J r \otimes C \ .$$

Or

$$r = 2EK \ ,$$

donc

$$R^{\circledcirc} = (2EK)J - Kd_J E \otimes C \ .$$

En appliquant le théorème III.3.4, on trouve K constante sur M.

Si (M,E) est riemannienne,

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} d_J \tilde{R}^* \qquad \text{(tenseur de Ricci)}$$

et donc

$$W = R^* - rJ + \frac{1}{n+1}(3\tilde{R} + (2-n)d_J r)\otimes C$$
$$= R^* - rJ + \frac{1}{2} d_J r \otimes C \ .$$

W_1 peut être exprimé par

$$W_1 = R - \frac{1}{2} d_J r \wedge J \ .$$

Remarque.

$\tilde{W}_1 = 0$, donc $d_J \tilde{R} = 0$.

Une variété riemannienne projectivement plate est donc à courbure constante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - P. DAZORD - "Propriétés globales des géodésiques des espaces Finsler".
Thèse Sc. Math. Université de Lyon (1969).

[2] - L. EISENHART - "Non-riemannian geometry".
(American Mathematical Society, colloqium publications, Vol. VIII (1964)).

[3] - J. FAVARD - "Cours de géométrie différentielle locale".
Cahiers scientifiques. Gauthier-Villars, Fasc.XXIV (1957).

[4] - FRÖLICHER-NIJENHUIS - "Theory of vector-valued differential forms".
Part. I, Proc. Kon. Ned. Akad. (1956) pp.338-359.

[5] - J. GRIFONE - "Structure presque tangente et connexions non homogènes".
Thèse Sc. Math. Université de Grenoble (1971).

[6] - C. GODBILLON - "Géométrie différentielle et Mécanique Analytique".
Hermann (1969).

[7] - KOBAYASHI & NOMIZU - "Foundations of differential geometry". Vol. I
(Interscience Publishers London (1963).

[8] - J. KLEIN - VOUTIER - "Formes extérieures génératrices de sprays".
Annales de l'Institut Fourier de l'Université de Grenoble. Tome XVIII, Fasc.I (1968) pp. 241-260.

[9] - H. RUND - "The differential geometry of Finsler spaces".
(Springer-Verlag) (1959).

[10] - G. VRANCEANU - "Cours de géométrie différentielle locale". Vol. II
Editions de l'Académie de la République Populaire Roumaine (1957).

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AUPIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémélologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEPMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique
et médicale,

M. SOUTIF